

文章编号 1004-924X(2006)02-0303-05

正交基函数多项式实时拟合 在轴角编码器测速中的应用

孟 中^{1,2}, 张 涛^{1,2}, 郑秀筠³, 韩松伟¹

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春, 130033;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039; 3. 吉林省无线电管理委员会, 吉林 长春 130051)

摘要:提出了一种基于正交基函数的多项式实时拟合方法,并应用于轴角编码器测速,解决了常规算法中拟合多项式阶数大于3阶时法方程组容易出现病态,进而使测速精度降低的问题。光电跟踪测量设备地面目标跟踪实验表明,该算法通过对拟合处理后的角度值进行微分运算得到角速率,能有效地降低编码器角度输出中随机误差对测速的影响。在典型实验条件下,与采用同阶拟合多项式的常规方法进行了比对,前者的测速误差标准偏差为 $0.01343^\circ/\text{s}$,后者为 $0.02815^\circ/\text{s}$,采用本算法提高了编码器的测速精度,适合在工程上应用。

关键词:实时拟合;轴角编码器;多项式拟合;法方程;角速率测量

中图分类号:TP212.12;TB934 **文献标识码:**A

Application of real time polynomial fitting based on orthogonal basis function algorithm to encoder rate measurement

MENG Zhong^{1,2}, ZHANG Tao^{1,2}, ZHENG Xiu-jun³, HAN Song-wei¹

(1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*; 2. *Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*; 3. *Jilin Radio Administration Committee Office, Changchun 130051, China*)

Abstract: A real time polynomial fitting algorithm based on orthogonal basis function was proposed to encoder angular rate measurement. The algorithm can avoid the ill-conditioned status leading to degrading the rate-measuring precision in normal equation when the rank of fitting polynomial is more than three. The ground target tracking experiment with photoelectric tracking survey equipment shows that the algorithm is effective to decrease the effect of angular random errors on angular rate measurement when calculating the differential of the angular fitting output. Typically, the standard deviation of rate-measuring errors using this algorithm is $0.01343^\circ/\text{s}$ by contrast with the $0.02815^\circ/\text{s}$ using the normal method. Therefore the improved algorithm applied to engineering can improve the angular rate measurement precision obviously.

Key words: real time fitting; angle encoder; polynomial fitting; normal equation; angular rate measurement

收稿日期:2005-11-22;修订日期:2006-01-18.

基金项目:中科院青年创新基金资助项目(Q03R10Z)

1 引言

在机载光电跟踪测量系统中,常常需要实时输出跟踪状态下视轴(LOS)相对于载体的角度和角速率信息。一般情况下,该角速率的变化范围很小,属于低速范围。

由于目前角速率传感元件零位偏置、零位噪声的制约,低速测量时,常常选择角位置测量元件(如增量式光电轴角编码器)测速,但是微分环节的作用放大了编码器角度输出中的随机误差分量,降低了低速测量精度。如何从低信噪比的角度数据中滤除噪声,再通过微分算法输出真实的角速率信息是提高测速精度的关键,有必要选择一种实时跟踪下的滤波或者预测算法,对编码器输出角度进行滤波或者预测得到角度信息,改善编码器的低速特性。

文献[1]~[4]指出,目前对角度测量元件输出信息的实时处理主要是:限定记忆型最小二乘(LS)递推算法。该算法采用多项式拟合(Polynomial Fitting)模型,即采用多项式去实时逼近数据序列,利用在线拟合的多项式函数值作为滤波(或者预测)输出,提高测速精度。但是,常规的多项式逼近(拟合)算法中,多项式模型多为线性或者二次多项式,这样带来的是方法误差过大,从而造成了一定的拟合误差;而且,该模型所选用的基函数也没有考虑法方程(Normal Equation)组“病态”对拟合精度的影响。针对上述问题,本文通过施密特(Schmited)正交化法,引入一组基函数,得到正交多项式 $Q_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$),避免了常规拟合下法方程组病态概率高、拟合解误差大的不足,保证了改进算法下法方程组的良态性,得到具有较小误差的最小二乘解,提高了角度滤波(预测)精度,进而也提高了测速精度。

2 多项式实时拟合测速原理

选用多项式实时拟合滤波(预测)是根据足够的编码器输出样本(或编码器微分后的输出数据)建立多项式拟合模型,通过该模型计算当前时刻的输出值或者预见未来的值。实时建模的基本思想是:认为当前时刻的值只与前一时刻及此前一段 m 个历史值有关,而与更远的过去值没有内

在联系。因此 m 个输入的编码器观测数据 $\{x(t_i), i=1, 2, \dots, m\}$,采用在线拟合,求得时刻 t_m 后某个时刻 $t_i (i>m)$ 的状态估计 $\hat{z}(t_i)$,即为预测处理,或称为外推;如果求得时刻 t_m 的状态估计 $\hat{z}(t_i)$,即为滤波处理,也称为端点平滑。随着采样的进行,观测数据 $\{x(t_i), i=1, 2, \dots, m\}$ 不断地补充新的 h 个数据进来,丢掉最前端的 h 个数据,保持滑动窗(Sliding Window)的长度为 m ,针对不断更新的 m 个数据进行拟合并输出当前时刻拟合多项式值作为滤波输出。如果先对编码器输出数据进行实时拟合处理的话,还需要对处理后的数据进行标准的一阶向后微分来输出角速率。

这种思想最大的优点是无需大量的历史观测值,其模型参数可以根据新数据的陆续到来自行调整,这样即使是缓慢变化的非平稳过程(时变过程),也能做到随统计数据的变化而变化,预测动态过程,达到角速率实时测量的目的。

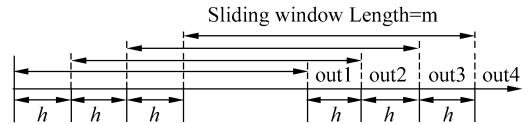


图 1 滑动窗实时数据处理示意图

Fig1 Illustration of real time process with sliding window

3 多项式拟合的实现与法方程组病态

对采样得到的编码器数据: $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, m)$,求一个 $n (n<m)$ 阶多项式 $P(x)$,使它在 x_i 点上取值尽量接近 y_i 。利用最小二乘准则选择 $a_k (k=0, 1, \dots, n)$,并设所求的多项式:

$$P(x) = a_0 q_0(x) + a_1 q_1(x) + \dots + a_n q_n(x), \quad (1)$$

根据文献[6],在通常情况下,工程上多选取代数多项式拟合,即取:

$$q_0(x) = 1, q_1(x) = x, \dots, q_n(x) = x^n, \quad (2)$$

可见如何求解拟合多项式 $P(x)$ 的系数即为算法的核心。这里设点 $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ 是使下述多元函数 S 达到最小值的点,即: $S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=0}^n a_k q_k(x_i) - y_i \right]^2$ 的极小值点,从而 $a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*$ 将满足方程组:

$$\partial S / \partial a_k = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n), \quad (3)$$

可以得到下式:

$$a_0 \sum_{i=1}^m q_k(x_i) q_0(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^m q_k(x_i) q_1(x_i) + \dots + a_n \sum_{i=1}^m q_k(x_i) q_n(x_i) = \sum_{i=1}^m q_k(x_i) y_i, \quad (4)$$

对任意函数 $h(x)$ 和 $g(x)$, 引入记号: $(h, g) = \sum_{i=1}^m h(x_i) g(x_i)$, 则上述方程组可以表示成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} (q_0, q_0) & (q_0, q_1) & \dots & (q_0, q_n) \\ (q_1, q_0) & (q_1, q_1) & \dots & (q_1, q_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q_n, q_0) & (q_n, q_1) & \dots & (q_n, q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_0, f) \\ (q_1, f) \\ \vdots \\ (q_n, f) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

上述方程组(5)即为法方程组。当 $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ 线性无关时, 可以证明它存在唯一解: $a_0 = a_0^*, a_1 = a_1^*, \dots, a_n = a_n^*$ 。

将(2)带入(5)中, 可以得到简化后形如: $XA = Y$ 的法方程组, 其中: x_i 为 m 个编码器输入对应的时刻, 一般令 $x_i = i, y_i$ 为对应时刻编码器的输出。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad (6)$$

随着采样的进行, 不断有 h 个数据进行补充, 丢掉先前 h 个数据, 这样就实现了实时计算拟合多项式的系数矩阵 A 。

选用常规的代数多项式作为基函数, 原则上解决了最小二乘意义下的多项式拟合问题, 但在实际计算中, 随着拟合阶数 n 加大和滑动窗中编码器输入数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$) 的不断更新, 使得法方程组容易呈现“病态”。而编码器的输入数据是动态变化的, 并且是随机的, 故使得法方程组的病态也呈现一定的随机性, 会给求解工作带来一定困难。

研究过程中, 曾对阶数为 3 和 4 的多项式拟合模型的法方程组做了病态检测实验: 发现模型为二阶多项式拟合的法方程组出现病态的概率很小。当滑动窗的长度 m 从 3 变化到 1 000 时, 法

方程组基本不会出现病态; 但是三阶多项式拟合模型的法方程组出现病态的情况比较多, 且具有随机性。例如: 当 $m=3$ 时, 法方程组呈“良态”; 当 $m=4$ 时, 法方程组是病态的。而且拟合的多项式阶数越高, 出现法方程组病态的概率越高^[7]。

根据文献[10], 当 m 选择较大时, 如果拟合多项式阶数 n 选择很低, 如选用一阶线性拟合、二阶多项式拟合时, 有时会造成可观的截断误差出现。可见选择三阶以上的多项式拟合是常用的, 这样就必须考虑法方程组的病态问题。

4 选用正交基函数拟合

对于点集 $\{x_i\}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 若一组函数 $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ ($n < m$) 满足条件:

$$(q_k, q_j) = \sum_{i=1}^m q_k(x_i) q_j(x_i) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ A_k > 0 & k = j \end{cases} \quad (k, j = 0, 1, \dots, n), \quad (7)$$

则称 $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ 是关于点集 $\{x_i\}$ 的正交基函数, 特别当 $q_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 都是多项式时, 就称 $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ 是关于点集 $\{x_i\}$ 的一组正交多项式。

可以证明, 在前述最小二乘拟合问题中, 若函数类: $Q = \{q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)\}$ 中的基函数 $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ 是关于给定点集 x_i 的正交函数族, 则由上述条件知, 在法方程组(5)的系数矩阵中, 非对角线上元素: $(q_k, q_j) = 0$ ($k \neq j$), 因此法方程组简化为:

$$\begin{bmatrix} (q_0, q_0) & & & \\ & (q_1, q_1) & & \\ & & O & \\ & & & (q_n, q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_0, f) \\ (q_1, f) \\ \vdots \\ (q_n, f) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

由正交性质可知, $(q_k, q_k) \neq 0$ ($k=0, 1, \dots, n$), (8)中系数矩阵为对角线矩阵, 使得法方程组不存在病态性, 而且解方程组是很简单的, 容易得出:

$$a_k^* = \frac{(q_k, f)}{(q_k, q_k)} = \frac{\sum_{i=1}^m q_k(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^m [q_k(x_i)]^2}, \quad (9)$$

为了求解 a_k^* , 还需要构造正交基函数, 在工程上经常采用的基函数基础上, 进行施密特正交化, 得到正交基函数, 其具体构建方法如下:

可以证明, 对于给定的点集 $\{x_i\} (i=1, 2, \dots, m)$ 利用递推公式:

$$\begin{cases} q_0^*(x) = 1 \\ q_1^*(x) = x - \alpha_1 \\ \dots \\ q_{k+1}^*(x) = (x - \alpha_{k+1})q_k(x) - \beta_k q_{k-1}(x), \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{若设: } d_k = \sum_{i=1}^m [q_k^*(x_i)]^2 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

$$\text{则 } \alpha_{k+1} = \frac{1}{d_k} \sum_{i=1}^m x_i [q_k^*(x_i)]^2, \beta_k = d_k / d_{k-1}$$

($k = 1, 2, \dots, n-1; n < m$)

这样即构建了一组正交基函数, 带入(9)即可在线求得拟合多项式的系数, 再根据公式(10), 得到正交基函数拟合的 n 阶多项式:

$$Q(x) = a_0^* q_0^*(x) + a_1^* q_1^*(x) + \dots + a_n^* q_n^*(x), \quad (11)$$

5 算例分析

某光电跟踪测量系统跟踪其前下方一个匀速运动目标(汽车), 如图 2 所示。通过系统距地面高度 H , 被跟踪目标速度(车速), 跟踪起始位置角度以及终止位置角度等信息(或者跟踪过程视轴的变化角度 $\Delta\beta$), 可以计算出跟踪过程中期望输出的视轴角速率变化标准曲线, 如图 3 中的光滑虚线 A 所示。没有采用正交基函数的三阶多项式拟合角位移滤波和一阶向后微分相结合的测速输出如曲线 B 所示, 而采用正交基函数, 同样算法下测速输出如曲线 C 所示。其中编码器采样周期为 20 ms, 滑动窗长度为 75 点, 即累积 75 个数据后(对应时间为 1.5 s 左右), 输出第一个角速率信息, 然后每隔 20 ms, 窗滑动一次, 进行数据更新。可以明显地看出, 曲线 B 的测速精度不如曲线 C 高, 通过统计分析得出曲线 B 误差的标准偏差为 $0.02815^\circ/\text{s}$, 而曲线 C 误差的标准偏差为 $0.01343^\circ/\text{s}$ 。采用正交基函数多项式拟合并

进行微分测速输出的算法是有效合理的, 而常规拟合算法则因为法方程组病态性随着采样进行而随机出现, 产生了一定的拟合误差, 进而导致了较大的测速误差。

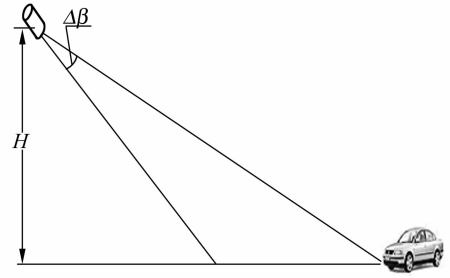


图 2 俯仰角速率测量实验

Fig. 2 Experiment of angular rate measurement overhead

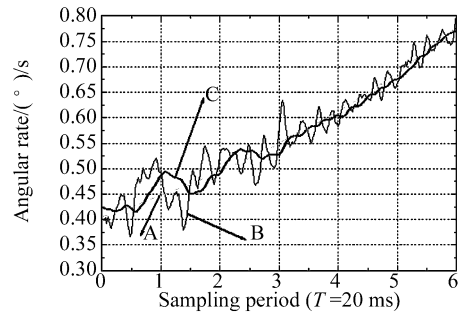


图 3 优化前后输出与期望输出比较

Fig. 3 Contrast of output vs. original one before and after optimization

6 结论

采用正交基函数的多项式实时拟合滤波能实时跟踪目标动态位置或者速度的变化, 模型具有自适应性, 能实现信息的不断更新。而对于常规算法, 特别是拟合多项式阶数大于等于 3 时, 运算过程中无法保证每次数据更新所确立的法方程组的良态性, 由于其病态的随机性, 使得常规拟合算法下编码器测速精度下降。实践表明: 采用基于正交基函数的实时拟合算法, 提高了角度测量精度, 进而提高了测速精度。在光电跟踪测量系统中, 通过该算法可以利用角度测量元件进行高精度的测速应用。

参考文献:

- [1] YANG W Q, JIA ZH H. An effective multiple model least squares method in tracking of a maneuvering target[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1995, 4(1): 29-35.
- [2] PROKIN M. Extremely wide-range speed measurement using a double buffered method[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1994, 41(5): 550-559.
- [2] PROKIN M. Speed measurement using the improved DMA transfer method[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1991, 38(6): 476-483.
- [3] BONERT R. Design of a high performance digital tachometer with a micro controller[J]. *IEEE Transactions Instrumentation and Measurement*, 1989, 38(6): 1104-1108.
- [4] PROKIN M. Dynamic response of a frequency measuring system[J]. *IEEE Transactions Instrumentation and Measurement*, 1992, 41(3): 390-396.
- [5] BROWN R H, SCHNEIDER S C, MULLIGAN M G. Analysis of algorithms for velocity estimation from discrete position versus time data[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1992, 39(1): 11-19.
- [6] 张尚剑, 刘永智. 用滑动窗多项式拟合法实时预测运动目标轨迹[J]. *光电工程*, 2003, 30(4): 24-27.
ZHANG S J, LIU Y ZH. Prediction of moving target trajectory with sliding window polynomial fitting[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2003, 30(4): 24-27. (in Chinese)
- [7] 陈广义, 吴继周, 董德发, 等. 模型系数的最小二乘法拟合[J]. *石油学报*, 1994, 15(2): 161-165.
CHEN G Y, WU J ZH, DONG D F. The least square matching of model coefficient[J]. *Acta petrolei Sinica*, 1994, 15(2): 161-165. (in Chinese)
- [8] 徐智勇, 傅承毓, 王满意, 等. 用拟合函数法准确预测运动目标的轨迹[J]. *光电工程*, 2000, 27(1): 17-19.
XU ZH Y, FU CH Y, WANG M Y. Accurate prediction for trace of a moving target with fitting function method [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2000, 27(1): 17-19. (in Chinese)
- [9] ALAN J. 工程和科学的矩阵算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.
JENNINGS A. *Matrix computation for engineers and scientists* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1985. (in Chinese)
- [10] 刘利生, 张玉祥. 外弹道测量数据处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
LIU L SH, ZHANG Y X. *Measuring data process for exterior ballistics* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2002. (in Chinese)

作者简介: 孟 中(1975—), 男, 吉林长春人, 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所航测部博士研究生, 主要从事数字信号处理, 光电测控系统建模仿真、控制算法及相关的数据处理算法研究; Email: masterme@sina.com;
张 涛(1964—), 男, 吉林长春人, 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所航测部主任, 博士生导师, 研究方向为测控系统稳定控制。Email: Zhangt@ciomp.ac.cn